Objetivos a cubrir **Código : MAT-CDI.7**

- Problema: Recta tangente a una curva en un punto x_0.
- Problema: Velocidad promedio y velocidad instántanea de un móvil en un instante t_0.
- Definición de derivada de una función real.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1 : *Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva* $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$ *que pasa por el punto* $(1,1)$.

Solución : Veamos si el punto es de tangencia

$$y = \frac{\sqrt{2(1)-1}}{(1)} = \frac{\sqrt{2-1}}{1} = 1$$

si es de tangencia. Buscamos la pendiente de la recta tangente

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{2(1+h)-1}}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(1+h)-1} - (1+h)}{h(1+h)} = \frac{0}{0}$$

levantamos la indeterminación aplicando conjugada

$$\begin{aligned}
m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(1+h)-1} - (1+h)}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2(1+h)-1} - (1+h)\right)}{h(1+h)} \frac{\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)}{\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h) - 1 - (1+h)^2}{h(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2 + 2h - 1 - \left(1 + 2h + h^2\right)}{h(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{h(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + (1+h)\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(1+h)\left(\sqrt{2(1+h)-1} + 1 + h\right)} = 0
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es

$$y = 1$$

★

Ejemplo 2 : *Dada la ecuación del movimiento rectilíneo de un móvil:* $e = t^3 + \dfrac{3}{t}$. *Calcular la velocidad promedio entre* $t = 4$ *y* $t = 6$ *y la velocidad instantánea cuando* $t = 4$.

Solución : Es conocido que la velocidad promedio de un móvil con función posición $s = s(t)$ entre los instantes $t = t_0$ y $t = t_1$ viene dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0},$$

así, la velocidad promedio entre $t = 4$ y $t = 6$ es

$$v_{\text{prom}} = \frac{e(6) - e(4)}{6 - 4} = \frac{e(6) - e(4)}{2},$$

donde

$$e(6) = (6)^3 + \frac{3}{(6)} = \frac{433}{2} \qquad \text{y} \qquad e(4) = (4)^3 + \frac{3}{(4)} = \frac{259}{4},$$

por lo que,

$$v_{\text{prom}} = \frac{e(6) - e(4)}{2} = \frac{\dfrac{433}{2} - \dfrac{259}{4}}{2} = \frac{\dfrac{607}{4}}{2} = \frac{607}{8}, \qquad \text{es decir,} \qquad v_{\text{prom}} = \frac{607}{8}.$$

Calculemos, ahora, la velocidad instantánea del móvil cuando $t = 4$, es conocido que la velocidad instantánea ó simplemente velocidad, en un instante $t = t_0$ viene dada por

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

donde, $s(t)$ representa la función posición del móvil en cualquier instante t, así,

$$v(4) = e'(4) = \lim_{t \to 4} \frac{e(t) - e(4)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{t^3 + \dfrac{3}{t} - \left((4)^3 + \dfrac{3}{4}\right)}{t - 4} = \frac{0}{0} \qquad \longleftarrow \qquad \text{Indeterminado}$$

calculemos el límite

$$v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{t^3 + \dfrac{3}{t} - \left((4)^3 + \dfrac{3}{4}\right)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{\left(t^3 - 4^3\right) + \left(\dfrac{3}{t} - \dfrac{3}{4}\right)}{t - 4} \stackrel{?}{=} \lim_{t \to 4} \frac{t^3 - 4^3}{t - 4} + \lim_{t \to 4} \frac{\dfrac{3}{t} - \dfrac{3}{4}}{t - 4},$$

donde,

$$\lim_{t \to 4} \frac{t^3 - 4^3}{t - 4} = \frac{0}{0} \quad \longleftarrow \quad \text{Indeterminado}; \qquad \lim_{t \to 4} \frac{\dfrac{3}{t} - \dfrac{3}{4}}{t - 4} = \frac{0}{0} \quad \longleftarrow \quad \text{Indeterminado}$$

y

$$\lim_{t \to 4} \frac{t^3 - 4^3}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{(t - 4)\left(t^2 + 4t + 16\right)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \left(t^2 + 4t + 16\right) = (4)^2 + 4(4) + 16 = 48,$$

mientras que,

$$\lim_{t \to 4} \frac{\dfrac{3}{t} - \dfrac{3}{4}}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{3\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{4}\right)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{3\left(\dfrac{4 - t}{4t}\right)}{t - 4} = \frac{3}{4} \lim_{t \to 4} \frac{4 - t}{t(t - 4)} = \frac{3}{4} \lim_{t \to 4} \frac{-(t - 4)}{t(t - 4)}$$

$$= \frac{3}{4} \lim_{t \to 4} \frac{-1}{t} = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16},$$

luego

$$v(4) = 48 - \frac{3}{16} = \frac{765}{16}.$$

★

Ejemplo 3 : *Determine la derivada, por definición, de la siguiente función*

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

Solución : Tenemos, por definición de derivada, que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

así, para $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2(x + h)) - \operatorname{sen}(2x)}{h}$$

Calculamos el límite, el cual es una indeterminación $\dfrac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2(x+h))-\operatorname{sen}(2x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x+2h)-\operatorname{sen}(2x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)\cos(2h)+\cos(2x)\operatorname{sen}(2h)-\operatorname{sen}(2x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[\cos(2h)-1]\operatorname{sen}(2x)+\cos(2x)\operatorname{sen}(2h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[\cos(2h)-1]\operatorname{sen}(2x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2x)\operatorname{sen}(2h)}{h}\\
&= \operatorname{sen}(2x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2h)-1}{h}+\cos(2x)\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h}
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(2h)}{2h}$$

haciendo el cambio de variable

$$u=2h, \qquad \Longrightarrow \qquad \text{si} \quad h\to 0 \quad \text{entonces} \quad u\to 2(0)=0$$

obtenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(2h)}{2h}=2\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u}=2(1)=2,$$

mientras que,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2h)-1}{h}=\frac{0}{0} \qquad \longleftarrow \qquad \text{Indeterminado}$$

aplicamos conjugada trigonométrica

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2h)-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos(2h)-1)}{h}\frac{(\cos(2h)+1)}{(\cos(2h)+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2(2h)-1}{h(\cos(2h)+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2(2h)}{h(\cos(2h)+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(2h)}{h}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{\cos(2h)+1}\stackrel{?}{=}-\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h}\ \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{\cos(2h)+1}
\end{aligned}$$

como

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(2h)}{2h}=2\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}u}{u}=2(1)=2$$

haciendo el cambio de variable

$$u=2h, \qquad \Longrightarrow \qquad \text{si} \quad h\to 0 \quad \text{entonces} \quad u\to 2(0)=0$$

y

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2h)}{\cos(2h)+1}=\frac{\operatorname{sen}(2(0))}{\cos(2(0))+1}=\frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)+1}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2h)-1}{h}=-(2)(0)=0$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2(x+h))-\operatorname{sen}(2x)}{h}=(0)\ \operatorname{sen}(2x)+(2)\ \cos(2x)=2\cos(2x),$$

luego

$$f'(x)=(\operatorname{sen}(2x))'=2\cos(2x)$$

★

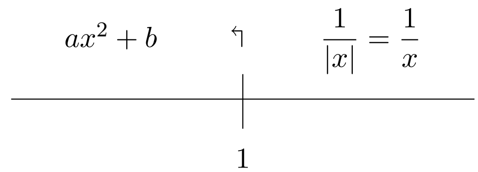
Ejemplo 4 *: Dada*

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & si \quad x\leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{|x|} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Encontrar los valores de a *y* b *para que* $f'(1)$ *exista.*

Solución : Tenemos que

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$



Para que $f'(1)$ exista el siguiente límite

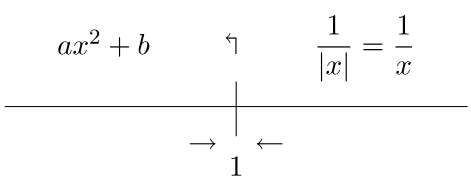
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

debe existir y además la función f debe ser continua en $x=1$.

Estudiemos la continuidad de f en $x=1$. Observemos que f está definida en $x=1$ y vale

$$f(1)=a(1)^2+b=a+b \qquad \Longrightarrow \qquad f(1)=a+b,$$

por otro lado, el límite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ debe existir.



$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+b\right)=a+b \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{|x|}=1 \end{cases}$$

por lo tanto, para que el límite exista se debe cumplir que

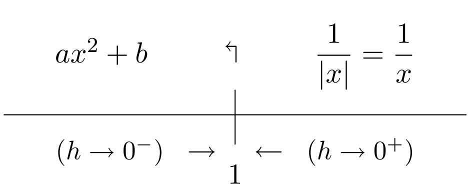
$$a+b=1,$$

observe que con esta igualdad se cumple la tercera condición para la continuidad.

Estudiemos, ahora, la diferenciabilidad de f en $x=1$. Como se dijo anteriormente, para que $f'(1)$ exista el siguiente límite

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

debe existir. Por la naturaleza de la función estudiamos los límites laterales



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{a(1+h)^2+b-\left(a(1)^2+b\right)}{h} \\ \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{1+h}-\left(a(1)^2+b\right)}{h} \end{cases}$$

como $a+b=1$, se tiene para cada límite lateral

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-}\frac{a(1+h)^2+b-\left(a(1)^2+b\right)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{a(1+h)^2+b-(a+b)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{a(1+h)^2+b-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{a\left(1+2h+h^2\right)+b-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{a+2ah+ah^2+b-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{(a+b)+2ah+ah^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2ah+ah^2-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{2ah+ah^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(2a+ah)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(2a+ah)=2a
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-\left(a(1)^2+b\right)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-(a+b)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{1-(1+h)}{1+h}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{1-1-h}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-1}{1+h}=-1
\end{aligned}$$

para que f sea diferenciable en $x=1$, se debe tener que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-(1)}{h}$$

es decir,

$$2a=-1 \qquad\Longrightarrow\qquad a=-\frac{1}{2}$$

y puesto que $a+b=1$, se tiene

$$-\frac{1}{2}+b=1 \qquad\Longrightarrow\qquad b=1+\frac{1}{2} \qquad\Longrightarrow\qquad b=\frac{3}{2}$$

Luego para que f sea diferenciable en $x=1$, las constantes son

$$a=-\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad b=\frac{3}{2}$$

y la fucnión f queda

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x\leq 1\\[2ex] \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

★

Ejemplo 5 : *Demuestre que* $f''(0)$ *no existe para* $f(x)=x|x|$.

Demostración : Es conocido que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

por lo tanto,

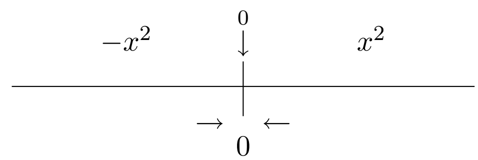
$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h},$$

así

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h},$$

pero no conocemos f', calculemos f', observemos que

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x<0\end{cases}=\begin{cases} x^2 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -x^2 & \text{si } x<0\end{cases}$$



Estudiemos cada caso

Caso $x>0$: Tenemos que $f(x)=x^2$, por lo tanto

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x,$$

luego

$$f'(x)=2x \qquad\qquad \text{si} \quad x>0$$

Caso $x=0$: Tenemos que

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}-h=0 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}h=0\end{cases},$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0 \qquad\Longrightarrow\qquad f'(0)=0.$$

Caso $x<0$: Tenemos que $f(x)=-x^2$, por lo tanto

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2-\left(-x^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2+x^2}{h}$$

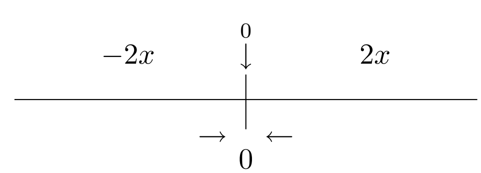
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x-(x+h))(x+x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}-(2x+h)=-2x,$$

luego

$$f'(x)=-2x \qquad\qquad \text{si} \quad x<0.$$

Entonces

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -2x & \text{si } x<0\end{cases} \qquad\Longrightarrow$$



Calculamos $f''(0)$

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h}{h}=\lim_{h\to 0^-}-2=-2\\[2ex] \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0^+}2=2\end{cases},$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h}\qquad \text{no existe}$$

y concluimos que $f''(0)$ no existe. ★

Ejercicios

1. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ en el punto $(2,1)$.
2. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $y=2x-x^{-1}$ en el punto $P\left(\frac{1}{2},-1\right)$.
3. Encuentre todos los puntos de la gráfica de $y=x^3-x^2$ donde la tangente sea horizontal.
4. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo de un móvil: $e=t^3+\dfrac{3}{t}$. Calcular la velocidad promedio entre $t=4$ y $t=6$ y la velocidad instantánea cuando $t=4$.
5. Si una piedra es arrojada verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 32 p/seg, la ecuación de movimiento es $s=-16t^2+32t$, donde t seg. es el tiempo que ha transcurrido desde que la piedra fue lanzada, s pies es la distancia de la piedra desde el punto de partida en t seg. y la dirección positiva es hacia arriba. Encontrar
   (a) La velocidad promedio de la piedra durante el intervalo de tiempo $\frac{3}{4}\leq t\leq\frac{5}{4}$.
   (b) La velocidad instantánea de la piedra en $\frac{3}{4}$ seg. y en $\frac{5}{4}$ seg.
   (c) La rapidez de la piedra en $\frac{3}{4}$ seg. y en $\frac{5}{4}$ seg.
   (d) La velocidad promedio de la piedra durante el intervalo de tiempo $\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{3}{2}$.
   (e) ¿Cuántos segundos tomaría a la piedra alcanzar el punto más alto?
   (f) ¿A qué altura máxima iría la piedra?
   (g) ¿Cuántos segundos tomaría a la piedra llegar al suelo?
   (h) La velocidad instantánea de la piedra cuando llega al suelo. Mostrar el comportamiento del movimiento con una figura.
6. Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ que pasa por el punto $(1,0)$.
7. Encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$ que pasa por el punto $(1,1)$.
8. Si una bola se empuja de tal forma que tiene una velocidad inicial de 24 p/seg. hacia abajo de un plano inclinado, entonces $s=24t+10t^2$, donde s pies es la distancia de la bola desde su punto de partida en t seg. y la dirección positiva hacia abajo del plano inclinado
   (a) ¿Cuál es la velocidad instantánea de la bola de t_1 seg.?
   (b) ¿Cuánto tiempo tarda la velocidad en incrementarse a 48 p/seg.?
9. Encuentre los puntos de la curva $y=x^3-x^2-x+1$ en los que la tangente sea horizontal.

10. Encuentre todos los puntos de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$ donde la recta tangente tenga pendiente 1.

11. Una partícula se mueve a lo largo de una linea recta de acuerdo a la ecuación de movimiento
$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1.$$
Determinar los intervalos de tiempo cuando se mueva la partícula a la derecha y cuando lo haga a la izquierda. También determinar el instante cuando la partícula cambia su dirección.

12. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 64p/seg. Si la dirección positiva de la distancia desde el punto de partida es hacia arriba, la ecuación del movimiento es
$$s = -16t^2 + 64t.$$
Si t es la cantidad de segundos en el tiempo que ha transcurrido desde que la pelota fue lanzada y s es la cantidad de pies en la distancia de la pelota desde el punto de partida en t seg encontrar
    (a) La velocidad instántanea de la pelota al término de 1 seg.
    (b) La velocidad instántanea de la pelota al término de 3 seg.
    (c) ¿Cuántos segundos tarda la pelota en alcanzar su punto más alto?
    (d) ¿A qué altura máxima irá la pelota?
    (e) La rapidez de la pelota al término de 1 y 3 seg.
    (f) ¿Cuántos segundo tarda la pelota en llegar al suelo?
    (g) La velocidad instantánea de la pelota, cuando alcanza el suelo. ¿Al término de 1 seg se encuentra la pelota subiendo o cayendo? ¿Al término de 3 seg la pelota está subiendo o cayendo?

13. Si un objeto cae desde el reposo su ecuación de movimiento es $s = -16t^2$, donde t es el cantidad de segundos en el tiempo que ha transcurrido desde que el objeto abandonó su punto de partida, s es el cantidad de pies en la distancia del objeto desde su punto de partida en t seg y la dirección positiva hacia arriba. Si se lanza una piedra desde un edificio de 256 pies de altura, encontrar
    (a) La velocidad instántanea de la piedra, 1 seg después de ser lanzada.
    (b) La velocidad instántanea de la piedra, 2 seg después de ser lanzada.
    (c) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?
    (d) La velocidad instántanea de la piedra cuando llega al suelo.

14. Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba y está a s pies sobre el suelo t seg después de ser encendido, donde $s = 560t - 16t^2$ y la dirección positiva es hacia arriba. Encontrar
    (a) La velocidad del cohete 2 seg después de haber sido encendido.
    (b) ¿Cuánto tarda el cohete en alcanzar su altura máxima?

15. Determine la derivada, por definición, de las siguientes funciones

1. $f(x) = -4$	2. $f(x) = 2$	3. $f(x) = -3x$	4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$	5. $f(t) = 2t^2$
6. $f(x) = x^3$	7. $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$	8. $f(x) = x^{-3}$	9. $f(t) = \cos 2t$	10. $y = 5x - 3$
11. $f(x) = 7 - 4x$	12. $f(x) = x^2 - 1$	13. $f(x) = 3 - 2x^2$	14. $f(x) = \sqrt{2x+1}$	
15. $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$	16. $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$	17. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$	18. $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2-x}$	
19. $f(x) = \dfrac{6}{x^2+1}$	20. $f(t) = \dfrac{2t-1}{1-t}$	21. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	22. $f(x) = \dfrac{-2}{4-x^2}$	

23. $y = \dfrac{x}{1-2x}$ 24. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 25. $f(x) = \dfrac{4}{3x} - \operatorname{sen} x$ 26. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$

27. $f(x) = \sec 2x$ 28. $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ 29. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ 30. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-x}$

31. $f(x) = \tan x$ 32. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x}+1}$ 33. $f(x) = \cos x^2$ 34. $f(x) = \cot 3x$

16. Cada uno de los siguientes límites dados representa la derivada de alguna función f en cierto número a. Determine f y a en cada caso.

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ 2. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$ 3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^9-1}{x-1}$ 4. $\displaystyle\lim_{x\to 3\pi} \frac{\cos x+1}{x-3\pi}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 6. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-1}{t}$ 7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ 8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

17. Demuestre que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

no existe cuando $x = 0$ y la función es $f(x) = |x|$.

18. Calcule

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

para $f(x) = x|x|$.

19. Demuestre que la función continua dada no es diferenciable en el valor de x indicado

1. $f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 2, \\ 2x-4 & x > 2 \end{cases}$ $x = 2$ 2. $f(x) = \begin{cases} 3x & x < 0, \\ -4x & x \geq 0 \end{cases}$ $x = 0$

20. Demuestre que la función $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$.

21. Demuestre que la función $f(x) = |x-6|$ no es diferenciable en $x = 6$. Encuentre la fórmula de f'.

22. Determine en dónde (y por qué) la siguiente función es discontinua. ¿En qué puntos no es diferenciable?

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x^2+x} & \text{si } x < 1 \quad (x \neq 0) \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

23. Dada

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Encontrar los valores de a y b para que $f'(1)$ exista.

24. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \leq 3 \\ ax + b, & \text{si} \quad 3 < x < 5 \end{cases}$$

Encontrar los valores de a y b para que $f'(3)$ exista.

25. Dada

$$f(x) = \begin{cases} nx^3 + 2, & \text{si} \quad x \geq 2 \\ mx^2, & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Encontrar los valores de m y n para que $f'(2)$ exista.

26. Considere la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. ¿Existe $f'(0)$?

27. Demuestre que $f''(0)$ no existe para $f(x) = x|x|$.

28. Considere la función $f(x) = x^2|x|$. ¿Existe $f''(0)$?

29. Sean $f(x) = 3x + |x|$ y $g(x) = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{|x|}{4}$. Demostrar que f y g no son diferenciables en $x = 0$, pero $f \circ g$ si lo es.

30. Sea $f(x) = (|x| - x)\sqrt[3]{9x}$, encontrar $f'(-3)$, si es que existe.

31. Sea $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$, encontrar $f'(x)$, si es que existe.

Respuestas: Ejercicios para resolver en el aula

1. $y = 2 - \frac{x}{2}$; 2. $y = 6x - 4$; 3. $(0,0)$ y $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$; 4. $v_m = \frac{607}{8}$ y $v = \frac{765}{16}$; 5.*a*. 0;

5.*b*. 8 y -8 p/seg; 5.*c*. 8; 5.*d*. 0; 5.*e*. 1 seg; 5.*f*. 16 pies; 5.*g*. 2 seg; 5.*h*. -32 p/seg;

6. $4y - x + 1 = 0$; 7. $y = 1$; 8.*a*. $20t_1 + 24$ p/seg; 8.*b*. $\frac{6}{5}$ seg; 9. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y $(1,0)$;

10. $(0,0)$ y $\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$; 11. Derecha si $t < \frac{1}{3}$ y $t > 1$; Izquierda si $\frac{1}{3} < t < 1$; Cambia si $t = \frac{1}{3}$ y $t = 1$;

12.*a*. 32 p/seg; 12.*b*. -32 p/seg; 12.*c*. 2 seg; 12.*d*. 64 pies; 12.*e*. 32; 12.*f*. 4 seg; 12.*g*. -64 p/seg;

13.*a*. -32 p/seg; 13.*b*. -64 p/seg; 13.*c*. 4 seg; 13.*d*. -128 p/seg; 14.*a*. 496 p/seg; 14.*b*. 35 seg;

15.1. 0; 15.2. 0; 15.3. -3; 15.4. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 15.5. $4t$; 15.6. $3x^2$; 15.7. $-\frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}$; 15.8. $-\frac{3}{x^4}$;

15.9. $-2\operatorname{sen} 2t$; 15.10. 5; 15.11. -4; 15.12. $2x$; 15.13. $-4x$; 15.14. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; 15.15. $\frac{1}{(4-x)^2}$;

15.16. $-\frac{6}{(3x+1)^2}$; 15.17. $\frac{-2}{(x-1)^2}$; 15.18. $\frac{2-x^2-4x}{(x^2-x)^2}$; 15.19. $\frac{-12x}{(x^2+1)^2}$; 15.20. $\frac{1}{(t-1)^2}$; 15.21. $\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$;

15.22. $-4\frac{x}{(4-x^2)^2}$; 15.23. $\frac{1}{(2x-1)^2}$; 15.24. $-\frac{1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$; 15.25. $-\frac{4}{3x^2} - \cos x$; 15.26. $-\frac{x^2+3}{(x^2-3)^2}$;

15.27. $2\sec 2x \tan 2x$; 15.28. $\frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$; 15.29. $2\operatorname{sen} x \cos x$; 15.30. $\frac{(1-x)\cos x + \operatorname{sen} x}{(1-x)^2}$; 15.31. $\sec^2 x$;

15.32. $-\frac{1}{6}\frac{(x-2\sqrt{x}-3)\sqrt[3]{x-1}}{2x^2-2x-\sqrt{x}+x^{\frac{5}{2}}}$; 15.33. $-2x\operatorname{sen} x^2$; 15.34. $-3\csc^2 3x$; 16.1. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$;

16.2. $f(x) = x^3$, $a = 2$; 16.3. $f(x) = x^9$, $a = 1$; 16.4. $f(x) = \cos x$, $a = 3\pi$; 16.5. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$, $a = 0$;

16.6. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{\pi}{2}$; 16.7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$; 16.8. $f(x) = \tan x$, $a = 0$; 18. 0;

21. $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 6 \\ -1, & x < 6 \end{cases}$; 22. Discontinua en $x = -1$. No diferenciable en $x = -1$ y $x = 0$;

23. $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$; 24. $a = 0$, $b = 1$; 25. $m = \frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{2}$; 26. No; 28. No;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "Cálculo". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "Cálculo". Grupo Editorial Iberoamericano.